UNIVERSITÀ DI PAVIA

Anno Accademico 2019/2020

FENOMENI DI DIFFUSIONE E TRASPORTO	
Anno immatricolazione	2019/2020
Anno offerta	2019/2020
Normativa	DM270
SSD	MAT/07 (FISICA MATEMATICA)
Dipartimento	DIPARTIMENTO DI MATEMATICA 'FELICE CASORATI'
Corso di studio	MATEMATICA
Curriculum	PERCORSO COMUNE
Anno di corso	1°
Periodo didattico	Secondo Semestre (02/03/2020 - 09/06/2020)
Crediti	9
Ore	78 ore di attività frontale
Lingua insegnamento	Italiano
Tipo esame	SCRITTO E ORALE CONGIUNTI
Docente	SALVARANI FRANCESCO (titolare) - 6 CFU BISI FULVIO - 3 CFU
Prerequisiti	Nozioni di base di analisi matematica, algebra lineare, meccanica e analisi funzionale.
Obiettivi formativi	Il corso fornisce uno studio matematico introduttivo di alcune notevoli equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo che descrivono fenomeni di trasporto e diffusione. Si evidenzieranno i legami tra le proprietà fisiche dei sistemi e le proprietà matematiche dei modelli corrispondenti, in particolare l'equazione di Boltzmann lineare e il modello di materia soffice (continui).
Programma e contenuti	Prima parte (3 CFU - F. Bisi) Introduzione alla meccanica dei continui Algebra tensoriale. Spazio euclideo; punti, vettori, tensori; spazio vettoriale (differenze fra

punti) terna cartesiana; prodotto diadico; base canonica di diadi per lo spazio vettoriale dei tensori. Tensori simmetrici e antisimmetrici, vettore assiale associato ad un tensore antisimmetrico. Invarianti tensoriali di primo, secondo e terzo ordine. Tensori ortogonali, rotazioni. Teorema spettrale; decomposizione spettrale. Lemma del tensore radice, teorema di decomposizione polare.

Calcolo tensoriale.
Differenziabilità di un'applicazione lineare. Teorema della regolarità dell'applicazione lineare inversa. Derivata di un prodotto, di una funzione composta. Gradiente (di scalare/vettore); divergenza (vettore/tensore). Rotore di un vettore. Curve normalizzate, circuitazione. Teoremi della divergenza per campi scalari, vettoriali o tensoriali; teorema di localizzazione; teorema di Stokes.

Modello dei continui.
Deformazione, gradiente di deformazione; decomposizioni. Deformazioni rigide, traslazioni, rotazioni; piccole deformazioni, spostamenti rigidi infinitesimi. Moti; descrizione materiale e descrizione spaziale (punti di vista lagrangiano ed euleriano). Derivate temporali materiali e spaziali. Gradiente di velocità. Teoremi del trasporto della vorticità (spin). Teoremi del trasporto (teorema del volume, di Reynolds). Spin, teorema del trasporto della circuitazione e vorticità. Densità nel moto. Conservazione della massa, equazioni di continuità Quantità di moto e momento angolare. Equazioni di bilancio. Teorema fondamentale di Cauchy per il tensore degli sforzi. Grandezze termodinamiche ed equazioni costitutive. Materiali classici: fluidi perfetti, incomprimibili, barotropici; fluidi perfetti ed equazioni di Eulero; fluidi newtoniani ed equazioni di Navier Stokes, diffusione della vorticità. Unicità e stabilità per soluzioni di un problema di flusso viscoso.

Seconda Parte (6 CFU – F. Salvarani)
Trasporto e diffusione

Introduzione.
Origine delle equazioni di trasporto e diffusione: il random walk, equazione del calore ed equazione del trasporto libero. Il formalismo della teoria cinetica. Scaling di trasporto e di diffusione. Passaggio formale dal trasporto alla diffusione.

L'equazione lineare del trasporto libero.
Il problema di Cauchy. Il metodo delle caratteristiche, stime. Il problema al valore iniziale e al contorno. Bordo entrante, uscente e caratteristico. Tempo di uscita retrogrado, regolarità. Termini di sorgente e assorbimento. Principio del massimo. L'equazione stazionaria del trasporto: teorema di esistenza ed unicità, principio del massimo. Condizioni al contorno "di rinnovo".

Introduzione ai metodi numerici alle differenze finite per l'equazione del trasporto libero.
Consistenza, stabilità e convergenza per metodi numerici alle differenze finite. Gli schemi di Lax-Friedrichs, Upwind e Diamante. Loro proprietà fondamentali.

	L'equazione di Boltzmann lineare. Il problema di Cauchy: esistenza ed unicità, stime e positività della soluzione. Il problema ai limiti per l'equazione di Boltzmann lineare: condizioni di bordo entrante, di riflessione speculare e diffusa. Il lemma di Darrozes-Guiraud. Esistenza ed unicità della soluzione. Il limite di diffusione per l'equazione di Boltzmann lineare. L'equazione del calore in un dominio limitato, proprietà di base. Scaling diffusivo e sviluppo di Hilbert. Teorema di convergenza. Calcolo critico. Comportamento asintotico in tempo per l'equazione di Boltzmann lineare. L'equazione del calore. Il problema di Cauchy per l'equazione del calore: esistenza e unicità della soluzione, proprietà qualitative (principio del massimo, effetto regolarizzante, irreversibilità, velocità infinita di propagazione). Comportamento asintotico in tempo. Omogeneizzazione. Applicazioni della teoria dell'omogeneizzazione bi-scala al trasporto e alla diffusione. L'equazione dei mezzi porosi. Soluzioni auto-similari. Proprietà di base. Il problema di Cauchy. Sistemi di equazioni di diffusione. Introduzione alle equazioni di cross-diffusion. Il sistema di Maxwell-Stefan. Instabilità di Turing.
Metodi didattici	Lezioni frontali (30+48 ore totali)
Testi di riferimento	M. E. Gurtin. An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press (NY), 1981. G. Allaire, X. Blanc, B. Despres, F. Golse. Transport et diffusion. Les éditions de l'Ecole Polytechnique. Palaiseau 2019 L. C. Evans. Partial differential equations. American Mathematical Society. Providence 1998 J. L. Vázquez. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Clarendon Press. Oxford 2007
Modalità verifica apprendimento	Prova orale.
Altre informazioni	
Obiettivi Agenda 2030 per lo sviluppo sostenibile	$lbl_legenda_sviluppo_sostenibile